LİNEER CEBİR I FİNAL SINAVI

11.01.2019

CEVAP ANAHTARI

1 – $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ sisteminin bir baz olduğunu kabul edelim. Her elemanın $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ -lerin bir lineer birleşimi olarak ifade edilebileceğini biliyoruz. Kabul edelim ki V nin bir α elemanı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ -lerin lineer birleşimi olarak aşağıdaki gibi iki farklı şekilde ifade edilebilsin:

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i \qquad ; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} b_i \alpha_i \, .$$

O zaman

$$\sum_{i=1}^{n} (b_i - a_i) \alpha_i = 0$$

olur. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ -ler V nin bazı dolayısıyla lineer bağımsız olduklarından $\forall i$ için

$$b_i - a_i = 0$$

$$\Rightarrow \quad b_i = a_i$$

bulunur. Bunun anlamı V nin her elemanı $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ -lerin lineer birleşimi olarak tek türlü ifade edilebilir.

2- $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y=2x,\ z=1\}$ cümlesi :

$\forall\ \alpha=(x_1,y_1,z_1),\ \beta=(x_2,y_2,z_2)\in W$ için

$\alpha\in W$ olduğundan $y_1=2x_1 \wedge z_1=1$

$\beta\in W$ olduğundan $y_2=2x_2 \wedge z_2=1$ yazılır.

Buradan ; $y_1+y_2=2(x_1+x_2) \wedge z_1+z_2=2$ dır.

Şimdi $\alpha+\beta$ vektörünün W'ya ait olup olmadığına bakalım :

$$\alpha+\beta=(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)$$
$$=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ \underbrace{z_1+z_2}_{=2\neq 1})$$ bulunur.

$=2\neq 1$ olduğundan $\alpha+\beta\notin W$ dır.

Bunun anlamı W cümlesi $\mathbb{R}^3$ ün bir alt vektör uzayı değildir.

3- $\{x+y-z,\ y+z,\ 2x\}$ cümlesi :

$\lambda_1(x+y-z)+\lambda_2(y+z)-\lambda_3(2x)=\vec{0}$ olacak şekildeki λ_1,λ_2 ve λ_3 skalerlerini inceleyelim.

$\Rightarrow (\lambda_1-2\lambda_3)x+(\lambda_1+\lambda_2)y+(-\lambda_1+\lambda_2)z=\vec{0}$ yazılır.

Hipoteze göre $\{x,y,z\}$ sistemi lineer bağımsız olduğu için

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1-2\lambda_3=0\\ \lambda_1+\lambda_2=0\\ -\lambda_1+\lambda_2=0\end{array}\right\}\Rightarrow 2\lambda_2=0\Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_2=0\\ \lambda_1=0\\ \lambda_3=0\end{array}$$ bulunur.

O halde $\{x+y-z,\ y+z,\ 2x\}$ sistemi lineer bağımsızdır.

4- $\forall x,y \in V$ için norm tanımından

$$\|x+y\|^2 = \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\,\mathrm{Re}\{\langle x,y\rangle\}$$

yazılır. Herhangi bir c kompleks sayısı için

$$\mathrm{Re}\{c\} \leq |c|$$

olduğundan

$$\|x+y\|^2 \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2|\langle x,y\rangle|$$

dır. Bu esitsizlikte $|\langle x,y\rangle|$ ifadesi yerine Schwarz esitsizliğindeki değeri yazılırsa

$$\|x+y\|^2 \leq \langle x,x\rangle + \langle y,y\rangle + 2\|x\|\,\|y\|$$

$$= \left(\|x\| + \|y\|\right)^2$$ olup her iki tarafın karekökleri alınırsa

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$ elde edilir.

5- 1- $\forall \alpha = (x_1, x_2),\ \beta = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $\alpha+\beta = (x_1+y_1, x_2+y_2)$ olsun.

$$A(\alpha+\beta) = A(x_1+y_1, x_2+y_2) = (x_1+y_1, x_2+y_2, 0)$$
$$= (x_1, x_2, 0) + (y_1, y_2, 0)$$
$$= A(\alpha) + A(\beta)$$

2- $\forall \alpha = (x_1, x_2)$ ve $\forall c \in \mathcal{F}$ $(=\mathbb{R})$ için $c\alpha = (cx_1, cx_2)$ olsun.

$$A(c\alpha) = A(cx_1, cx_2) = (cx_1, cx_2, 0)$$
$$= (cx_1, cx_2, c.0)$$
$$= c(x_1, x_2, 0)$$
$$= c\,A(\alpha).$$

O halde, yukarıdaki iki özelliği aynı anda sağlayan A dönüşümü lineerdir.